ОБ ИЗБЫТОЧНОСТИ И ЗАМЕДЛЕНИИ РАЗДЕЛИМОГО КОДИРОВАНИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

В. И. ЛЕВЕНШТЕЙН
(МОСКВА)

В статье рассматриваются последовательности $V = \{v_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, состоящие из слов в алфавите $B_r = \{0, 1, \ldots, r-1\}$, $r \geqslant 2$. Такие последовательности будем называть (счетными) *кодами*, а отображения $n \to v_n$ — *кодированиями*. Длину слова β в B_r обозначим через $\lambda(\beta)$ и для кода $V = \{v_n\}$ положим $\lambda_V(n) = \lambda(v_n)$. Далее рассматриваются лишь коды V с *неубывающей функцией длин* $\lambda_V(n)$.

Код V называется *плотным*, если для произвольного слова β в B_r существует слово $v_i \in V$ такое, что β начинается словом v_i или v_i начинается словом β. Код $V = \{v_n\}$ называется *разделимым*, если из равенства $v_{i_1} \ldots v_{i_k} = v_{j_1} \ldots v_{j_l}$ в B_r следует, что $k = l$ и $i_t = j_t$, $t = 1, \ldots, k$. Достаточное условие разделимости кода состоит в том, что никакое слово кода не является началом другого. Такие коды будем называть *префиксными*. Свойство разделимости кода $V = \{v_n\}$ равносильно взаимной однозначности отображения, при котором каждой последовательности $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ натуральных чисел ставится в соответствие слово $v_{n_1} v_{n_2} \ldots v_{n_k}$ в алфавите B_r. Известный код $\mathscr{E}_r = \{e_{n,r}\}$ с функцией длин *)

$$\lambda_{\mathscr{E}_r}(n) = \lambda(e_{n,r}) = [\log_r n] + 1, \tag{1}$$

состоящий из r-ичных записей натуральных чисел, т. е. слов $e_{n,r} = b_1 b_2 \ldots b_l$ в B_r длины $l = [\log_r n] + 1$ таких, что

$$n = \sum_{j=1}^{l} b_j r^{l-j},$$

является плотным, но не является ни префиксным, ни разделимым. Примером префиксного плотного кода является двоичный ($r = 2$) код $D = \{u_n\}$, где $u_n = 0^n 1$, $n = 0, 1, \ldots$

Избыточностью кода V будем называть функцию

$$\Delta_V(n) = \lambda_V(n) - \lambda_{\mathscr{E}_r}(n).$$

Код $V = \{v_n\}$ называется *вычислимым*, если существует машина Тьюринга $\mathfrak{M}$, преобразующая $e_{n,r}$ в v_n ($n = 0, 1, \ldots$) за некоторое время $t_{\mathfrak{M}}(n)$. Функцию

$$\tau_{\mathfrak{M}}(n) = \frac{t_{\mathfrak{M}}(n)}{\lambda_{\mathscr{E}_r}(n)},$$

характеризующую сложность кодирования $n \to v_n$, будем называть *замедлением* машины $\mathfrak{M}$ для кода V.

*) В статье через $[x]$ обозначается целая часть числа x и принято соглашение, что $\log_r x = 0$ при $x = 0$.

В статье построены префиксные плотные коды W_r и W'_r, избыточность которых асимптотически равна $\log_r \log_r n$. Для каждого из этих кодов существует машина, замедление которой имеет порядок $\log_r \log_r n$. С другой стороны, показано, что эти асимптотические оценки избыточности и замедления в определенном смысле нельзя улучшить в классе разделимых кодов. Предложенные коды являются префиксными аналогами кода $\mathscr{E}_r$ и могут оказаться полезными в той ситуации, когда число кодируемых объектов заранее неизвестно.

Критерии разделимости и плотности кодов. Для конечных кодов известен следующий критерий разделимости, доказательство которого основано на использовании неравенства Крафта — Макмиллана [1] и метода построения Шеннона.

Теорема 1. *Для существования разделимого кода V с функцией длин $\lambda_V(n) = \lambda(n)$ необходимо и достаточно, чтобы $\lambda(n)$ принимала целые положительные значения и*

$$\sum_{n=0} r^{-\lambda(n)} \leqslant 1. \tag{2}$$

Аналогичное утверждение (с заменой конечной суммы в (2) на ряд) справедливо и для счетных кодов. Напомним, что метод построения Шеннона основан на введении вспомогательных чисел $P_n = \sum_{i=1}^{n-1} r^{-\lambda(i)}$, $n = 0, 1, \ldots$. Ввиду (2) $0 \leqslant P_n < 1$ и в силу неубывания $\lambda(n)$ число P_n можно представить единственным образом в виде (r-ичной дроби) $P_n = \sum_{i=1}^{\lambda(n)} b_i r^{-i}$, где $b_i \in B_r$, $i = 1, \ldots, \lambda(n)$. В качестве кодового слова v_n берется слово $b_1 b_2 \ldots b_{\lambda(n)}$. Так как при $m > n$ имеют место неравенства $P_m \geqslant P_n + r^{-\lambda(n)}$ и $\lambda(m) \geqslant \lambda(n)$, то построенный код $V = \{v_n\}$ (с функцией длин $\lambda(n)$) будет префиксным и, следовательно, разделимым. Таким образом, если существует разделимый код с функцией длин $\lambda(n)$, то существует префиксный код с той же функцией длин.

Для конечных кодов известен [2] критерий плотности, согласно которому разделимый код V является плотным тогда и только тогда, когда он префиксный и $\sum_{n=0} r^{-\lambda_V(n)} = 1$. Интересно отметить, что в случае разделимых счетных кодов равенство $\sum_{n=0}^{\infty} r^{-\lambda_V(n)} = 1$, вообще говоря, не является следствием плотности. Более того, для любого $\varepsilon > 0$ существует счетный префиксный плотный код, для которого $\sum_{n=0}^{\infty} r^{-\lambda(n)} < \varepsilon$. Такой код можно построить на основе известной конструкции нигде не плотного в отрезке $[0, 1]$ множества меры $> 1 - \varepsilon$. Тем не менее указанный критерий остается в силе для *регулярных* кодов, т. е. кодов, представимых конечными автоматами.

Теорема 2. *Для того чтобы разделимый код V был плотным, достаточно, а в случае регулярных кодов и необходимо, чтобы он был префиксным и*

$$\sum_{n=0} r^{-\lambda_V(n)} = 1.$$

Доказательство. Достаточность условий теоремы очевидна. Пусть V — разделимый плотный регулярный код. Обозначим через $k(n)$ — число кодовых слов длины n, а через $t(n)$ — число слов длины n, не начинающихся кодовыми словами. Заметим, что $\sum_{i=1}^{n} k(n) r^{n-i} \geqslant r^n - t(n)$ и, следовательно, $\sum_{i=1}^{n} k(n) r^{-i} \geqslant 1 - t(n) r^{-n}$. В силу плотности кода $t(n) \leqslant \sum_{j=1}^{s} k(n+j)$, где s — число состояний автомата, представляющего V. С помощью равенства $\sum_{n=0}^{\infty} r^{-\lambda_V(n)} = \sum_{i=1}^{\infty} k(i) r^{-i}$ и неравенства (2) легко обосновать теперь следующую цепочку утверждений: $k(n) r^{-n} \to 0$ при $n \to \infty$, $t(n) r^{-n} \to 0$ при $n \to \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} r^{-\lambda_V(n)} = 1$, код V — префиксный. Теорема доказана.

Заметим также, что в случае конечных плотных кодов каждая бесконечная последовательность в B_r начинается некоторым кодовым словом. Для счетных кодов это не так. Можно показать, что для любого разделимого счетного кода существует по крайней мере одна бесконечная последовательность в B_r, которая не начинается никаким кодовым словом.

Оценки избыточности и замедления.

Теорема 3. *Пусть c — произвольная константа. Для любого разделимого кода V*

$$\Delta_V(n) \geqslant c \tag{3}$$

для всех n, начиная с некоторого.

Доказательство (от противного). Если утверждение теоремы не выполнено, то существует возрастающая последовательность n_t ($t = 0, 1, \ldots$) такая, что

$$\lambda_V(n_t) < \log_r n_t + c + 1. \tag{4}$$

Положим $n_t = (1 - \alpha_t) n_{t+1}$. В силу неубывания функции $\lambda_V(n)$ и неравенства (4)

$$\sum_{n=0}^{n_t - 1} r^{-\lambda_V(n)} \geqslant \sum_{j=0}^{t-1} (n_{j+1} - n_j) r^{-\lambda_V(n_j+1)} \geqslant r^{-(c+1)} \sum_{j=0}^{t-1} \alpha_j. \tag{5}$$

Заметим, что $0 < \alpha_j < 1$ и $\prod_{j=0}^{t-1} (1 - \alpha_j) = \frac{n_0}{n_t} \to 0$ при $t \to \infty$, что влечет расходимость ряда $\sum_{t=0}^{\infty} \alpha_t$. Но тогда ввиду (5) расходится и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} r^{-\lambda_V(n)}$, что противоречит разделимости кода V. Теорема доказана.

Отметим, что при $c = 0$ неравенство (3) справедливо начиная с $n = 0$.

Замечание 1. Утверждение теоремы 3 нельзя усилить, заменив c какой-нибудь неубывающей функцией $\varphi(n)$ такой, что $\varphi(n) \to \infty$ при $n \to \infty$.

Введем некоторые обозначения. Для фиксированного r ($r \geqslant 2$) положим $n_r^{(0)} = 0$ и $n_r^{(i)} = r^{n_r^{(i-1)}}$ при $i \geqslant 1$. Определим целочисленную функцию $m_r(x)$, полагая $m_r(x) = i$, если $n_r^{(i)} \leqslant x < n_r^{(i+1)}$. Очевидно, что равенство $m_r(x) = i$ равносильно условию

$$0 \leqslant \log_r^{(i)} x < 1,$$

где $\log_r^{(0)} x = x$ и $\log_r^{(i)} x = \log_r (\log_r^{(i-1)} x)$ при $i \geqslant 1$. Функция $m_r(x)$ растет с ростом x чрезвычайно медленно. Так, например, при $r = 2$ $m_2(1) = 1$,

$m_2(100)=4$, $m_2(2^{10\,000})=5$. В дальнейшем функция $m_r(x)$ в определенном смысле будет характеризовать точность наших асимптотических рассмотрений. Положим также

$$\sigma_r(x)=\sum_{i=1}^{m_r(x)}\log_r^{(i)}x.$$

Лемма 1. *Пусть $f(n)$ — положительная невозрастающая функция натурального аргумента. Ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^{-\sigma_r(n)}(\log_r e)^{m_r(n)} f(m_r(n))$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$.

Доказательство леммы основано на равенстве

$$\int_{n_r^{(j)}}^{n_r^{(j+1)}} r^{-\sigma_r(x)}(\log_r e)^{m_r(x)}dx=1,$$

которое доказывается индукцией по j.

Из теоремы 1 и леммы 1 при $f(n)\equiv 1$ следует

Теорема 4. *Не существует разделимого кода V такого, что*

$$\Delta_V(n)\leqslant\sum_{i=2}^{m_r(n)}\log_r^{(i)}n-(\log_r^{(2)}e)\,m_r(n)$$

для всех n, начиная с некоторого.

Замечание 2. Из теоремы 4 следует, что для произвольного разделимого кода V $\Delta_V(n)>\log_r\log_r n$ для бесконечного множества чисел n. Отметим, что аналогичное утверждение для почти всех n, вообще говоря, уже несправедливо.

Будем говорить, что разделимый код W *имеет минимальную избыточность с точностью до функции* $g(n)$, если не существует разделимого кода V такого, что

$$\Delta_V(n)\leqslant\Delta_W(n)-g(n)$$

для всех n, начиная с некоторого. С помощью леммы 1 по методу Шеннона можно построить вычислимые префиксные коды, которые имеют минимальную избыточность с точностью до $m_r(n)$ или еще более медленно растущих функций. Однако мы не можем гарантировать, что замедление машин Тьюринга для этих кодов имеет минимальный порядок роста. Далее мы построим префиксные коды W_r и W_r', которые имеют минимальную избыточность с точностью до $m_r(n)$ и минимальный порядок замедления.

Перейдем к оценкам замедления. Будем рассматривать машины Тьюринга, работающие на двусторонней ленте, и предполагать, что все ячейки ленты занумерованы целыми числами $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ Предположим также, что машина среди своих внутренних состояний имеет одно начальное и одно заключительное состояние, после перехода в которое она останавливается. Будем говорить, что машина $\mathfrak{M}$ реализует отображение (слов в слова) $y=f(x)$, если выполняются следующие условия. В начальный момент каждое слово x (из области определения отображения $f(x)$) расположено в ячейках с номерами $1, 2, \ldots, \lambda(x)$, остальные ячейки пусты, и машина, находясь в начальном состоянии, обозревает первую букву

слова x. Через некоторое время $t_{\mathfrak{M}}(x)$ машина переходит в заключительное состояние и останавливается, причем в этот момент в $\lambda(y)$ последовательных ячейках ленты расположено слово $y=f(x)$, остальные ячейки пусты, и машина обозревает последнюю букву слова y. Функция $\tau_{\mathfrak{M}}(x)=t_{\mathfrak{M}}(x)/\lambda(x)$ (отношение времени работы к длине входного слова) называется *замедлением* машины $\mathfrak{M}$.

Если задан вычислимый код $V=\{v_n\}$, то сложность кодирования $n\to v_n$ будем оценивать замедлением машины Тьюринга, реализующей это отображение. Ясно, что замедление существенно зависит от того, в каком виде число n вводится в машину. В частности, если число n задавать словом v_n, то замедление будет равно 1. Мы будем рассматривать два естественных задания числа n в виде слова $e_{n,r}$ длины $[\log_r n]+1$ и в виде слова $e_{n,1}=0^n$ длины n ($e_{0,1}$ — пустое слово). Для любого вычислимого кода $V=\{v_n\}$ в B_r будем обозначать через $\mathfrak{M}(V)$ машину, реализующую отображение $e_{n,r}\to v_n$, а через $\mathfrak{M}'(V)$ — машину, реализующую отображение $0^n\to v_n$. При этом положим $\tau_{\mathfrak{M}(V)}(e_{n,r})=\tau_{\mathfrak{M}(V)}(n)$ и $\tau_{\mathfrak{M}'(V)}(0^n)=\tau_{\mathfrak{M}'(V)}(n)$.

Теорема 5. *Для любого вычислимого разделимого кода V и любой машины $\mathfrak{M}(V)$, имеющей q ($q\geqslant 2$) состояний* (не считая заключительного),

$$\tau_{\mathfrak{M}(V)}(n)>\log_q\log_r n-3. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть машина $\mathfrak{M}(V)$ перерабатывает слово $e_{n,r}=b_1\ldots b_l$, где $l=[\log_r n]+1$. Последовательность состояний (отличных от заключительного), в которых головка машины пересекает границу между i-й и $(i+1)$-й ячейками, называется следом в точке i. Предположим, что следы в точках i и j $(1\leqslant i<j\leqslant l)$ совпадают, и рассмотрим последовательность чисел n_t $(t=1, 2, \ldots)$ таких, что $e_{n_t,r}=b_1\ldots b_i\,(b_{i+1}\ldots b_j)^t b_{j+1}\ldots b_l$. Заметим, что после переработки слова $e_{n,r}$ ячейки с номерами $i+1, i+2, \ldots, j$ не пусты, так как в противном случае образы слов $e_{n_t,r}$ $(t=2, 3, \ldots)$ совпадают или не определены. Но тогда $\Delta_V(n_t)=\lambda(v_n)-l$ при $t=1, 2, \ldots$, что в силу теоремы 3 противоречит разделимости кода V. Таким образом, следы в точках $1, 2, \ldots, l$ различны. Следовательно, если $q^h\leqslant l<q^{h+1}$, то

$$t_{\mathfrak{M}(V)}(e_{n,r})\geqslant\sum_{i=1}^{h-1}iq^i+h\left(l-\frac{q^h-1}{q-1}\right)\geqslant hl-\frac{q^{h+1}}{(q-1)^2}\geqslant l\left(h-\frac{q}{(q-1)^2}\right),$$

что приводит к неравенству (6).

Таким образом, для любого разделимого кода V машина $\mathfrak{M}(V)$ имеет логарифмическое (по отношению к длине входного слова) замедление. В случае, когда код V не является регулярным, этот результат в несколько более слабой формулировке *) следует из работы Б. А. Трахтенброта [3].

Отметим, что машина $\mathfrak{M}'(V)$ не всегда имеет логарифмическое замедление. В частности, для кода $D=\{0^n1\}$ с функцией длин $\lambda_D(n)=n+1$ существует такая машина с замедлением 1. Однако если ограничиться рассмотрением разделимых кодов V таких, что $\Delta_V(n)/n\to 0$ при $n\to\infty$, то аналогичным образом устанавливается, что

$$\tau_{\mathfrak{M}'(V)}(n)>\log_q n-3.$$

*) В общей ситуации, рассматриваемой Б. А. Трахтенбротом [3], логарифмическое замедление имеет место не для всех входных слов, а лишь для некоторого бесконечного множества их.

Префиксные аналоги кода $\mathscr{E}_r = \{e_{n,r}\}$. Зафиксируем число r ($r \geqslant 2$). Индекс r в обозначениях $e_{n,r}$, $\log_r^{(i)} n$, $n_r^{(i)}$, $m_r(n)$ будем иногда опускать. Определим коды $W_r = \{w_n\}$ и $W_r' = \{w_n'\}$ следующим образом:

$$w_n = \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{m(n)} 0, \tag{7}$$

$$w_n' = b_1 b_2 \ldots b_{m(n)} 0\, \beta_1' \beta_2' \ldots \beta_{m(n)}' \tag{8}$$

где $\beta_i = b_i \beta_i' = e_{[\log^{(m(n)-i)} n]}$, $b_i \in B_r$, $i = 1, \ldots, m_r(n)$. Например, при $r = 2$ и $n = 37$: $[\log^{(1)} 37] = 5$, $[\log^{(2)} 37] = 2$, $[\log^{(3)} 37] = 1$, $m_2(37) = 4$, $\beta_1 = e_1 = 1$, $\beta_2 = e_2 = 10$, $\beta_3 = e_5 = 101$, $\beta_4 = e_{37} = 100101$ и, следовательно, $w_{37} = 1101011001010$, $w_{37}' = 1111000100101$. В таблице приведены первые

n	$\mathscr{E}_2$	W_2	W_2'
0	0	0	0
1	1	10	10
2	10	1100	1100
3	11	1110	1101
4	100	1101000	1110000
5	101	1101010	1110001
6	110	1101100	1110010
7	111	1101110	1110011
8	1000	11110000	11101000
9	1001	11110010	11101001
10	1010	11110100	11101010
11	1011	11110110	11101011
12	1100	11111000	11101100
13	1101	11111010	11101101
14	1110	11111100	11101110
15	1111	11111110	11101111
16	10000	110100100000	111100000000
17	10001	110100100010	111100000001
18	10010	110100100100	111100000010
19	10011	110100100110	111100000011

20 слов кодов W_2 и W_2'. Из (1), (7) и (8) вытекает, что

$$\lambda_{W_r}(n) = \lambda_{W_r'}(n) = \sum_{i=1}^{m(n)} [\log_r^{(i)} n] + m_r(n) + 1 \tag{9}$$

и, следовательно, при $n \longrightarrow \infty$

$$\Delta_{W_r}(n) = \Delta_{W_r'}(n) \sim \log_r \log_r n.$$

Докажем, что коды W_r и W_r' являются префиксными. Последовательность слов $\{\gamma_i\}$, $i = 1, \ldots, m$ ($m \geqslant 0$), будем называть $W_r(W_r')$-*правильной для слова* γ, если выполнены следующие условия: 1) $\gamma_i = c_i \gamma_i'$, где $c_i \in \{1, \ldots, r-1\}$, причем γ_1' пусто; 2) длина слова γ_{i+1} равна $\lambda_i + 1$, где λ_i определяется из условия $e_{\lambda_i} = \gamma_i$; 3) слово $\gamma_1 \ldots \gamma_m 0$ (соответственно слово $c_1 \ldots c_m\, 0\, \gamma_1' \ldots \gamma_m'$) является началом слова γ. Отметим, что если для γ существует $W_r(W_r')$-правильная последовательность, то она единственна. Это следует из того, что γ_1 есть первая буква γ, каждое слово γ_{i+1} однозначно определяется по γ_i и γ и число членов последовательности в случае кода W_r ограничено условиями 1) и 3), а в случае кода W_r' равно максимальному числу первых ненулевых цифр слова γ. Для завершения доказательства заметим, что последовательность $\{\beta_i\}$, $i = 1, \ldots, m(n)$, является $W_r(W_r')$-правильной для слова w_n (соответственно w_n') в силу того, что $[\log^{(m(n)-i)} n] \geqslant 1$ и слово $e_{[\log^{(m(n)-i)} n]}$ имеет длину $[\log^{(m(n)-(i-1))} n] + 1$ при $1 \leqslant i \leqslant m(n)$.

Заметим далее, что в силу (9) $\lambda(w_n') \leqslant N_j = \sum_{i=0}^{j} n_r^{(i)}$, когда $n_r^{(j)} \leqslant n < n_r^{(j+1)}$. Учитывая, что каждое слово длины N_j, начинающееся j ненулевыми цифрами, после которых стоит 0, начинается некоторым словом w_n', где $n_r^{(j)} \leqslant n < n_r^{(j+1)}$, получаем $\sum_{n=n^{(j)}}^{n^{(j+1)-1}} r^{N_j - \lambda_{W_r'}(n)} = (r-1)^j r^{N_j - (j+1)}$ и, следовательно,

$$\sum_{n=n^{(j)}}^{n^{(j+1)-1}} r^{-\lambda_{W_r'}(n)} = (r-1)^j r^{-(j+1)}.$$

Из последнего равенства вытекают два следствия. Во-первых,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^{-\lambda_{W_r}(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-\lambda_{W_r'}(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} (r-1)^j r^{-(j+1)} = 1$$

и, следовательно, по теореме 2 коды W_r и W_r' являются плотными. Во-вторых, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} r^{-\lambda_{W_r'}(n) + m_r(n)}$ расходится и, следовательно, коды W_r и W_r' имеют минимальную избыточность с точностью до $m_r(n)$.

Заметим, наконец, что для кода $W_r(W_r')$ существует машина $\mathfrak{M}$, преобразующая $e_{n,r}$ в $w_n(w_n')$, и машина $\mathfrak{M}'$, преобразующая 0^n в $w_n(w_n')$, такие, что

$$\tau_{\mathfrak{M}}(n) \sim c_1 \log_r \log_r n,$$

$$\tau_{\mathfrak{M}'}(n) \sim c_2 \log_r n,$$

где c_1 и c_2 — некоторые константы. Это следует из (7) и (8), если воспользоваться тем, что подходящая машина по отрезку из l выделенных ячеек может найти $e_{l,r}$ за время порядка $l \log_r l$. Например, этим свойством обладает машина, которая при i-м прохождении отрезка выделяет каждую r-ю ячейку из числа l_{i-1} ($l_0 = l$) ячеек, выделенных при предыдущем прохождении, и определяет вычет $a_i \in B_r$ числа l_{i-1} по mod r. Процесс оканчивается после h-го прохождения, при котором не выделяется ни одной ячейки. Ясно, что $a_h a_{h-1} \ldots a_1 = e_{l,r}$.

В заключение отметим, что код W_2' (в отличие от кодов $\mathscr{E}_2$ и W_2) является лексикографически упорядоченным.

ЛИТЕРАТУРА

1. McMillan B., Two inequaties implied by unique decipherability, IRE Trans. IT — 2, 4, 1956, 115—116. (Русский перевод: Кибернетич. сб., вып. 3, М., ИЛ., 1961.)
2. Gilbert E. N., Moore E. F., Variable length binary encodings, Bell Syst. Techn. J. 38, 4, 1959, 933—967. (Русский перевод: Кибернетич. сб., вып. 3, М., ИЛ, 1961.)
3. Трахтенброт Б. А., Тьюринговы вычисления с логарифмическим замедлением, Алгебра и логика 3, вып. 4, 1964, 33—48.

Поступило в редакцию 6 II 1967